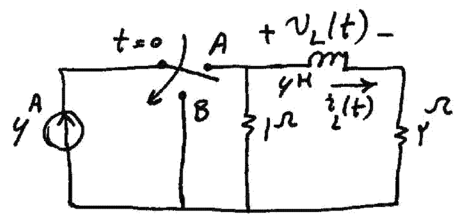
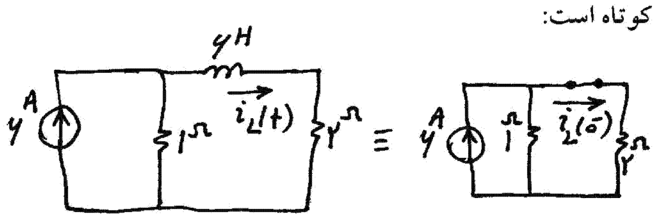
حل مسائل فصل ششم

۱ـ در مدار زیر کلید در لحظه t = ۰ از نقطه A به نقطه B جابه‌جا می‌شود. $i_L(t)$ و $v_L(t)$ را برای تمام زمانها به دست آورید.

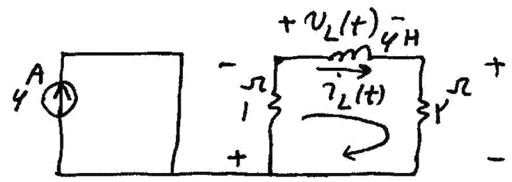


الف) t < ۰ : مدار به شکل زیر است. سلف در حالت پایدار و اتصال کوتاه است:



$$i_L(0^-) = \frac{1}{1+2}\times 6 = 2^A$$

ب) t > ۰ : مدار به دو بخش تقسیم می‌شود:



$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2^A$$

حل از روش معادله دیفرانسیل

$$KVL:\ 1\times i_L(t) + v_L(t) + 2i_L(t) = 0$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = 6\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow 3i_L(t) + 6\frac{di_L(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{2}i_L = 0$$

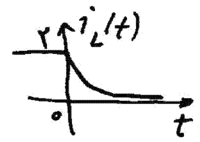
$$i_L(t) = Ke^{st},\quad s + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow s = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow i_L(t) = Ke^{-t/2}$$

$$t=0:\ i_L(0^+) = 2^A = Ke^0 \Rightarrow K=2$$

$$\Rightarrow i_L(t) = 2e^{-t/2} \qquad t>0$$

$$i_L(t) = \begin{cases} 2 & t<0 \\ 2e^{-t/2} & t>0 \end{cases}$$

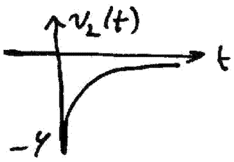


$$v_L(t) = 6\frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow v_L(t) = 0 \quad (t<0)$$

$$,\ v_L(t) = 6\frac{d}{dt}\left(2e^{-t/2}\right) = 6\times 2\times\frac{-1}{2}e^{-t/2}$$

$$= -6e^{-t/2} \quad (t>0)$$

$$v_L(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ -6e^{-t/2} & t>0 \end{cases}$$



حل به کمک مقدار اولیه و مقدار نهایی

$i_L(t) = [\,i_L(0) - i_L(\infty)]e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2^A$$

$$i_L(\infty) = 0 \quad , \quad \tau = \frac{L}{R} = \frac{6}{1+2} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\Rightarrow i_L(t) = [2-0]e^{-t/2} + 0 = 2e^{-t/2} \quad (t>0)$$

$v_L(t) = [\,v_L(0) - v_L(\infty)]e^{-t/\tau} + v_L(\infty)$

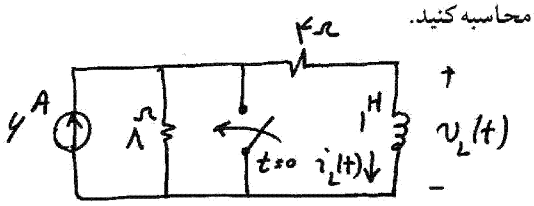
$$KVL:\ v_L(t) + 2i_L(t) + i_L(t) = 0$$

$$v_L(t) = -3i_L(t) \quad , \quad t=0:\ i_L(0) = 2^A$$

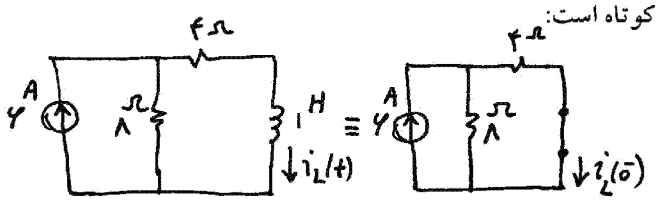
$$\Rightarrow v_L(0) = -3\times 2 = -6^V \quad , \quad v_L(\infty) = 0$$

$$\Rightarrow v_L(t) = [-6-0]e^{-t/2} + 0 = -6e^{-t/2} \quad (t>0)$$

۲ـ کلید در لحظه t = ۰ بسته می‌شود. جریان و ولتاژ سلف را برای تمام زمانها محاسبه کنید.

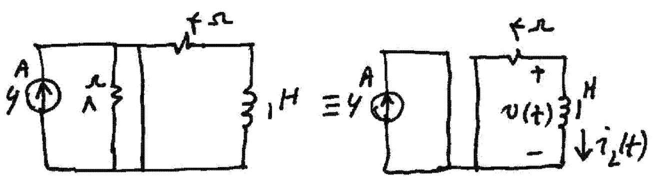


الف) t < ۰ : مدار به شکل زیر است. سلف در حالت پایدار و اتصال کوتاه است:



$$i_L(0^-) = \frac{8}{8+4}\times 6 = 4^A$$

ب) t > ۰ : مدار توسط اتصال کوتاه به دو بخش تقسیم می‌شود:



حل به کمک مقدار اولیه و مقدار نهایی

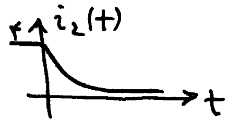
$i_L(t) = [\,i_L(0) - i_L(\infty)]e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 4^A$$

$$i_L(\infty) = 0 \quad , \quad \tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow i_L(t) = [4-0]\,e^{-4t} + 0 = 4e^{-4t}$$

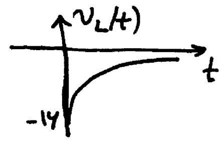
$$i_L(t) = \begin{cases} 4 & t \leqslant 0 \\ 4e^{-4t} & t > 0 \end{cases}$$



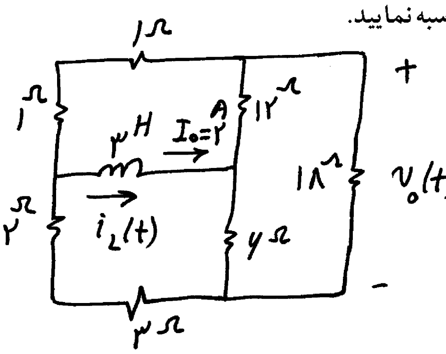
$$v_L(t) = L\,\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow v_L(t) = 0 \quad (t<0)$$

$$,\ v_L(t) = \frac{d}{dt}\left(4e^{-4t}\right) = -16e^{-4t} \quad (t>0)$$

$$v_L(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ -16e^{-4t} & t>0 \end{cases}$$



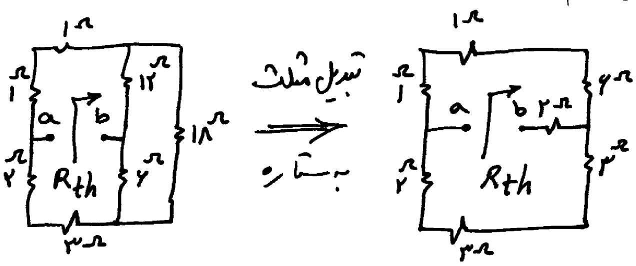
۳ـ سلف دارای جریان اولیه $i_L(0) = I_0 = 2^A$ است. پاسخ ورودی صفر $v_o(t)$ را محاسبه نمایید.



حل به کمک مقدار اولیه و مقدار نهایی

$$v_o(t) = [\,v_o(0) - v_o(\infty)]e^{-t/\tau} + v_o(\infty)$$

برای محاسبه ثابت زمانی، مقاومت ورودی از دیدگاه سلف را به دست می‌آوریم:



$$R_1 = \frac{R_bR_c}{R_a+R_b+R_c} = \frac{6\times12}{6+12+18} = \frac{72}{36} = 2^{\Omega}$$

$$R_2 = \frac{R_aR_c}{36} = \frac{6\times18}{36} = 3^{\Omega},\quad R_3 = \frac{R_bR_a}{36} = \frac{12\times18}{36} = 6^{\Omega}$$

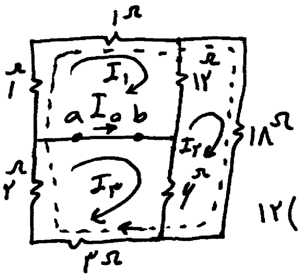
$$R_{th} = 2 + [(1+1+6)\,\|\,(2+3+3)] = 2 + [8\|8] = 2+4 = 6^{\Omega}$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

در حالت ماندگار، تمام انرژی ذخیره شده در سلف، درمقاومتهای مدار تلف می‌شود و ولتاژ یا جریانی در مدار باقی نمی‌ماند:

$$v_o(\infty) = 0$$

برای محاسبه $v_o(0)$ باید از جریان اولیه سلف استفاده کنیم:



$$KCL:\ I_1 - I_3 = I_0 = 2^A$$

در حلقه سوم KVL:

$$12(I_2 - I_1) + 18I_2 + 6(I_2 - I_3) = 0$$

$$\Rightarrow -12I_1 + 36I_2 - 6I_3 = 0 \Rightarrow -2I_1 + 6I_2 - I_3 = 0$$

در سوپرمش KVL: $I_1 + I_1 + 18I_2 + 3I_3 + 2I_3 = 0$

$$\Rightarrow 2I_1 + 18I_2 + 5I_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ 2 & 18 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_o(0) = 18\,I_2\ ,\quad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

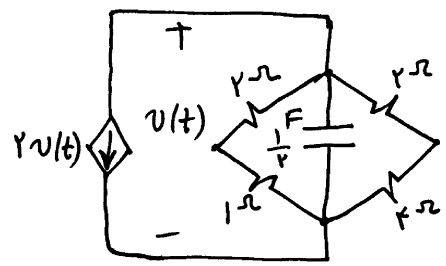
$$\Delta = 1[(6\times5) - (-1\times18)] - 1[(-2\times18) - (6\times2)] = 96$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2[(-1\times2) - (-2\times5)] = 16$$

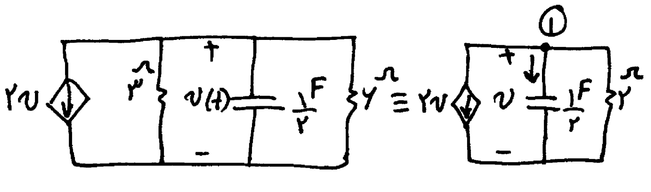
$$v_o(0) = 18\times\frac{16}{96} = 3^V$$

$$v_o(t) = [3-0]\,e^{-2t} + 0 = 3e^{-2t} \quad (t \geqslant 0)$$

۴ـ خازن دارای ولتاژ اولیه $v(0) = V_0 = 4^V$ است.پاسخ ورودی صفر $v(t)$ را به دست آورید.



مدار پس از سری و موازی کردن مقاومتها به شکل زیر در می‌آید.



حل از روش معادله دیفرانسیل

در گره ① KCL: $i_c(t) + \frac{v(t)}{2} + 2v(t) = 0$

$i_c(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv(t)}{dt}$

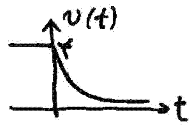
$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{5}{2}v(t) = 0 \Rightarrow v(t) = Ke^{st}$

معادله مشخصه: $\frac{1}{2}S + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow S = -5$

$\Rightarrow v(t) = Ke^{-5t}$

$t = 0 : v(0) = V_0 = 4 = Ke^{0} \Rightarrow K = 4$

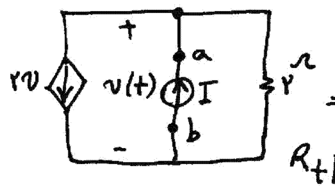
$$\Rightarrow v(t) = \begin{cases} 4 & t \le 0 \\ 4e^{-5t} & t > 0 \end{cases}$$



حل به کمک مقدار اولیه و مقدار نهایی

$v(t) = [\,v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau} + v(\infty)$

برای تعیین ثابت زمانی و $v(\infty)$ معادل تونن از دیدگاه خازن را به دست می‌آوریم:



KCL : $I = \frac{v}{2} + 2v$

$\Rightarrow I = \frac{5}{2}v \Rightarrow v = \frac{2}{5}I$

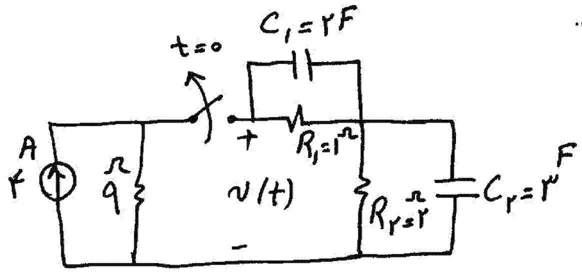
$R_{th} = \frac{2}{5}\Omega, \quad \tau = R_{th}.C = \frac{1}{5}$

در حالت پایدار، خازن مدار باز شده و $v(\infty) = V_{th} = V_{oc}$ خواهد بود:

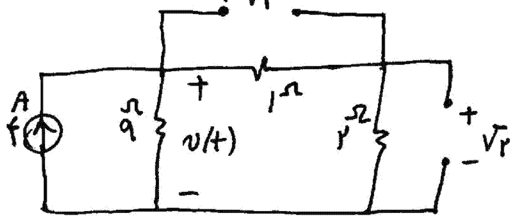
$v(0) = V_0 = 4^V, \quad v(\infty) = V_{oc} = V_{th} = 0$

$\Rightarrow v(t) = [4 - 0]e^{-5t} + 0 = 4e^{-5t} \quad (t>0)$

۵ـ کلید در لحظه $t = 0$ باز می‌شود. $v(t)$ را برای تمام زمانها محاسبه کنید.



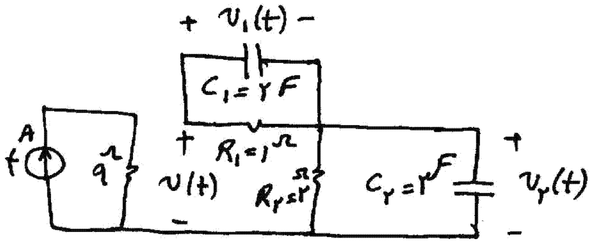
الف) $t < 0$: مدار در حالت پایدار بوده و خازنها مدار باز هستند:



$v(0^-) = \frac{9}{9+(1+2)} \times (1+2) \times 4^A = 9^V$

$V_1 = \frac{1}{1+2} \times 9^V = 3^V, \quad V_2 = \frac{2}{1+2} \times 9^V = 6^V$

ب) $t > 0$: مدار به سه بخش مجزا تقسیم می‌شود و خازن C_1 در مقاومت R_1 و خازن C_2 در مقاومت R_2 تخلیه خواهد شد:



حل به کمک مقدار اولیه و مقدار نهایی

$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$

$v_1(t) = [\,v_1(0) - v_1(\infty)]e^{-t/\tau_1} + v_1(\infty)$

$v_2(t) = [\,v_2(0) - v_2(\infty)]e^{-t/\tau_2} + v_2(\infty)$

$\tau_1 = R_1C_1 = 1\times 2 = 2, \quad \tau_2 = R_2C_2 = 2\times 3 = 6$

$v_1(0) = V_1 = 3^V, \quad v_2(0) = V_2 = 6^V$

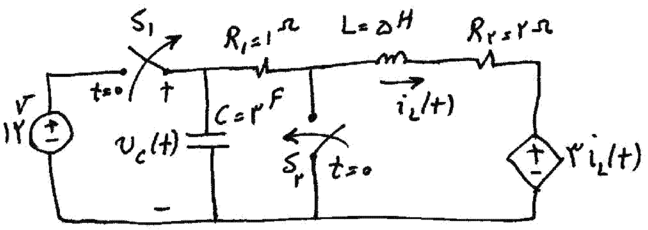
$v_1(\infty) = 0, \quad v_2(\infty) = 0$

$\Rightarrow v_1(t) = 3e^{-t/2}, \quad v_2(t) = 6e^{-t/6}$

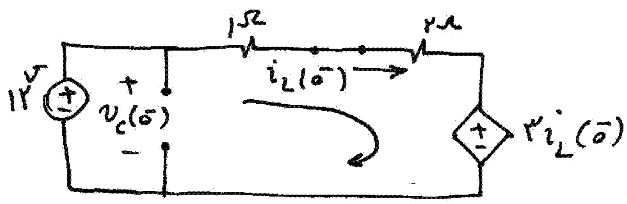
$v(t) = 3e^{-t/2} + 6e^{-t/6} \quad (t>0)$

$$\Rightarrow v(t) = \begin{cases} 9 & t \le 0 \\ 3e^{-t/2} + 6e^{-t/6} & t > 0 \end{cases}$$

۶ـ در لحظه $t = 0$ کلید S_1 باز و کلید S_2 بسته می‌شود. جریان سلف و ولتاژ خازن را برای تمام زمانها تعیین کنید.



الف) $t < 0$: قبل از تغییر وضعیت کلیدها، مدار در حالت پایدار بوده و خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه است:



$v_c(0^-) = 12^V$

KVL : $-12 + i_L(0^-) + 0 + 2i_L(0^-) + 3i_L(0^-) = 0$

$\Rightarrow 6i_L(0^-) = 12 \Rightarrow i_L(0^-) = 2^A$